29/10/15

Θεώρημα 1 (σελίδα 12)

$\alpha, b > 0$ έτσι ώστε $R = \{(x,y) : |x-x_0| \le \alpha, |y-y_0| \le b\} \subseteq D_f$ και υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο R και πληροί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $K>0$ στο R. Το συμπέρασμα είναι ότι:

(i) το Π.Α.Τ (Ε)-(C) έχει ακριβώς μια λύση y στο διάστημα $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ όπου $r = \min\{\alpha, b/M\}$ και $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$

*(για $M=0$ θέτουμε $r=\alpha$)

(ii) η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας συναρτήσεων (φ_ν) με $\varphi_0(x) = y_0$, $\varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))ds$, $x \in I$.

(iii) $|\varphi_\nu(x) - y(x)| \le \frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr}$, $x\in I$ $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2 σελίδα 24

$y' = x^2 + y^2$, $y(0)=0$.

Είναι $f(x,y) = x^2+y^2$, $x,y \in \mathbb{R}$ και παίρνουμε $\alpha, b>0$.

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2y| = 2|y| \le 2b \rightsquigarrow f$ είναι K-Lipschitz με $K=2b$.

Σύμφωνα με το Θ.1 το π.α.τ (Ε)-(C) έχει ακριβώς μια λύση εν $\{-r, r\}$ με $r = \min\{a, b/M\}$, $M = \max_{\substack{|x|\le\alpha \\ |y|\le b}} (x^2+y^2) = \alpha^2+b^2$

δηλαδή $r = \min\{\alpha, \frac{b}{\alpha^2+b^2}\}$

$\frac{b}{\alpha^2+b^2} = \frac{1}{2a}\frac{2ab}{\alpha^2+b^2} \le \frac{1}{2a}\cdot 1$ (η ισότητα για $\alpha=b$)

$\frac{b}{\alpha^2+b^2} = \frac{1}{2a}$ για $\alpha = b$.

δηλαδή $r_{max} = \min\{a, 1/2a\}$ // $\alpha = 1/2a \rightsquigarrow a^2 = 1/2 \rightsquigarrow \alpha = 1/\sqrt{2}$

(το "$-$" δεν μας ενδιαφέρει)

$1/\sqrt{2}$ για $\alpha = b = 1/\sqrt{2} \rightsquigarrow [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$

Παράδειγμα 3

$y' = x + y^2$, $y(0)=0$ $\quad [-1/2, 1/2]$

$R := \{|x| \le 1/2,\ |y| \le b\}$ $\quad \alpha, b > 0.$

$f(x,y) = x + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = 2|y| \le 2b = k$$

$$M = \max_{R} |f(x,y)| = \max_{R} (|x| + y^2) = \alpha + b^2$$

$r = \min\left\{1/2, \frac{b}{1/2 + b^2}\right\}$, είναι $\frac{b}{1/2+b^2} = \frac{b}{(1/\sqrt{2})^2 + b^2} \le \frac{b}{2\, 1/\sqrt{2}\, b} = 1/\sqrt{2} > 1/2 \Rightarrow b = 1/\sqrt{2}$ είναι $r = 1/2$

Θεώρημα 2

έστω $\alpha > 0$, τέτοιος ώστε $S = \{(x,y) : |x - x_0| \le \alpha,\ y \text{ αυθαίρετο}\} \subseteq D$ και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο S και πληροί την συνθήκη του Lipschitz με σταθερά $k > 0$ στο S. Τότε το π.α.τ (E)-(C) έχει ακριβώς μια λύση y στο διάστημα $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Επιπλέον, η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας των διαδοχικών προσεγγίσεων (φ_ν), όπου $\varphi_0(x) = y_0$, $x \in I$ και $\varphi_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\nu(s))\,ds$, ακόμα $|\varphi_\nu(x) - y(x)| \le \frac{M}{k} \frac{(k\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{k\alpha}$, $x \in I$

$$M = \max_{x \in I} |f(x, y_0)|$$

Παράδειγμα 4

$y' = e^{-y^2} + \sqrt{1 - x^2}$, $y(0) = 1$.

$f(x,y) = e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}$, $|x| \le 1 \quad y \in \mathbb{R} = S$

f συνεχής στο S

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|e^{-y^2}(-2y)\right| = \frac{2|y|}{e^{y^2}} \quad // \quad \varphi(t) = 2te^{-t^2},\ t \ge 0$$

$\varphi'(t) = 2e^{-t^2} + 2te^{-t^2}(-2t)$

$\lim_{+\infty} \varphi(t) = \lim_{+\infty} \frac{2t}{e^{t^2}} = 0$, $\quad \le \frac{2\, 1/\sqrt{2}}{e^{-(1/\sqrt{2})^2}}$

$\rightsquigarrow$ μοναδική λύση στο $[-1,1]$

$$M = \max_{|x|\le 1} |f(x,1)| = \max_{|x|\le 1}\left(e^{-1} + \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{e} + 1 \;//$$

- $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$
  $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$ $\quad\Big\|\quad$ $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2) \\ f_2(x,y_1,y_2) \end{pmatrix}$

$\bar{y} = \bar{f}(x,\bar{y})$, $\quad \bar{f}(x,\bar{y}) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\|y_1, y_2\| = \max(|y_1|, |y_2|)$ // $\|\bar{y}\| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$

$f(x,y)$ k-Lipschitz εν E.

$\|\bar{f}(x,\bar{y}) - \bar{f}(x,\bar{z})\| \le k\|\bar{y}-\bar{z}\|$, $(x,y),(x,z)\in E$.

Παράδειγμα

$y_1' = 2xy_1 + x^2y_2^2$ $\qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$

$y_2' = \sin y_1 + xe^{y_2}$ $\qquad R = \{|x|\le\alpha, \|\bar{y}\|\le b\}$

$f_1(x,y_1,y_2) = 2xy_1 + x^2y_2^2$

$f_2(x,y_1,y_2) = \sin y_1 + xe^{y_2}$

$$\bar{f}(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} 2xy_1 + x^2y_2^2 \\ \sin y_1 + xe^{y_2} \end{pmatrix}$$

$$k = \max\left\{ \sup \left\| \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,\bar{y}) \right\|,\ k = 1, \dots, n \right\}$$

$$\|\bar{f}(x,\bar{y}) - \bar{f}(x,\bar{z})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2xy_1 - 2xz_1 + x^2y_2^2 - x^2z_2^2 \\ \sin y_1 - \sin z_1 + xe^{y_2} - xe^{z_2} \end{pmatrix} \right\| =$$

$\max\{ |2x(y_1 - z_1) + x^2(y_2^2 - z_2^2)|, |\sin y_1 - \sin z_1 + x(e^{y_2} - e^{z_2})| \} \le$

$k\max|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2| \le k\|\bar{y} - \bar{z}\|$

- Ύστερα από κάποιες πράξεις - μεσοσταθμισμούς έχω:

$\le \max\{ 2\alpha|y_1 - z_1| + \alpha^2|y_2 - z_2||y_2 + z_2|, |y_1 - z_1| + \alpha|e^{y_2} - e^{z_2}| \}$

$\le \max\{ 2\alpha\|\bar{y} - \bar{z}\| + \alpha^2 2b\|\bar{y} - \bar{z}\|, \|\bar{y} - \bar{z}\| + \alpha \underbrace{e^{\xi}|y_2 - z_2|}_{\le e^{2b}\|\bar{y}-\bar{z}\|} \}$

$$= \|\bar{y} - \bar{z}\| \underbrace{\max\{2\alpha + \alpha^2 2b, 1 + \alpha e^{2b}\}}_{K}$$

Παράδειγμα 6

$y_1' = y_2^2$

$f_1(x, y_1, y_2)$, $y_1(0) = y_2(0) = 0$

$y_2' = x + y_1^2 = f_2(x, y_1, y_2)$

$$\left.\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x, \bar{y}) \right\| &= \left\| \begin{matrix} 0 \\ 2y_1 \end{matrix} \right\| = 2|y_1| \leq 2b \\ \left\| \frac{\partial f}{\partial y_2}(x, \bar{y}) \right\| &= \left\| \begin{matrix} 2y_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| = 2|y_2| \leq 2b \end{aligned}\right\} k = 2b$$

$\alpha, b > 0$

$$M = \sup_R \| \bar{f}(x, \bar{0}) \| = \sup \left\| \begin{matrix} 0 \\ x \end{matrix} \right\| = \alpha$$

$r = \min\{\alpha, b/M\} = \min\{\alpha, b/\alpha\}$